32　面積（１）

基本問題 ＆ 解法のポイント

53

$x-y=\pm\sqrt{2x}$ より，$y=x\pm\sqrt{2x}$

$x+\sqrt{2x}-\left(x-\sqrt{2x}\right)=2\sqrt{2x}$ より，$y=x+\sqrt{2x}$ と $y=x-\sqrt{2x}$ の y の差は無限に大きくなる。

$y=x+\sqrt{2x}$ について

$y'=1+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\geq 0$ より，y は単調に増加する。

また，$y''=-(2x)^{-\frac{3}{2}}<0$ より，上に凸

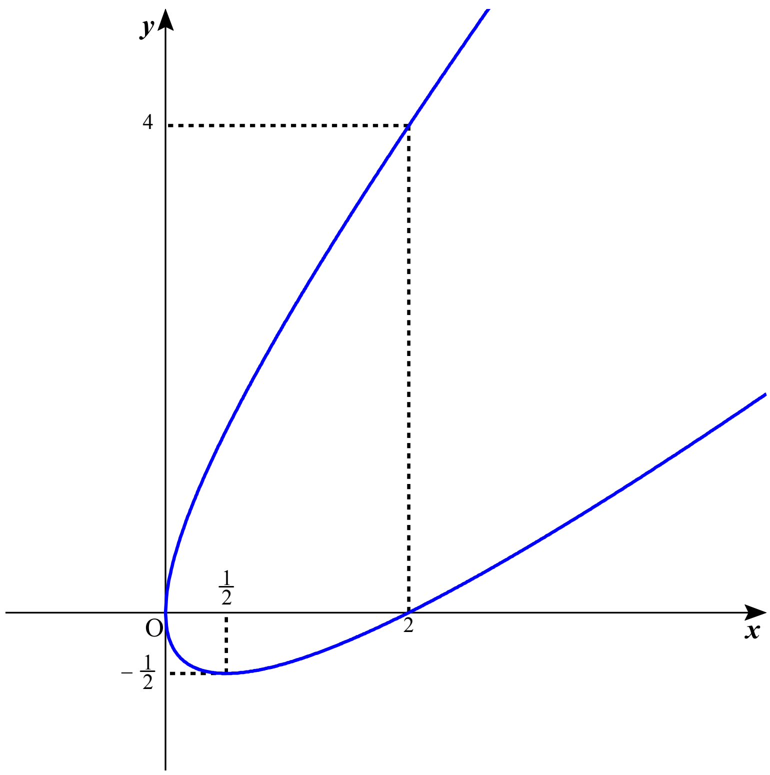
$y=x-\sqrt{2x}$ について

$y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ より，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき $y'=0$

よって，増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	/	$-$	0	$+$
y	0	$\downarrow$	$-\frac{1}{2}$	$\uparrow$

また，$y''=(2x)^{-\frac{3}{2}}>0$ より下に凸



求める面積を S とすると，

$$S=-\int_0^2\left(x-\sqrt{2x}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

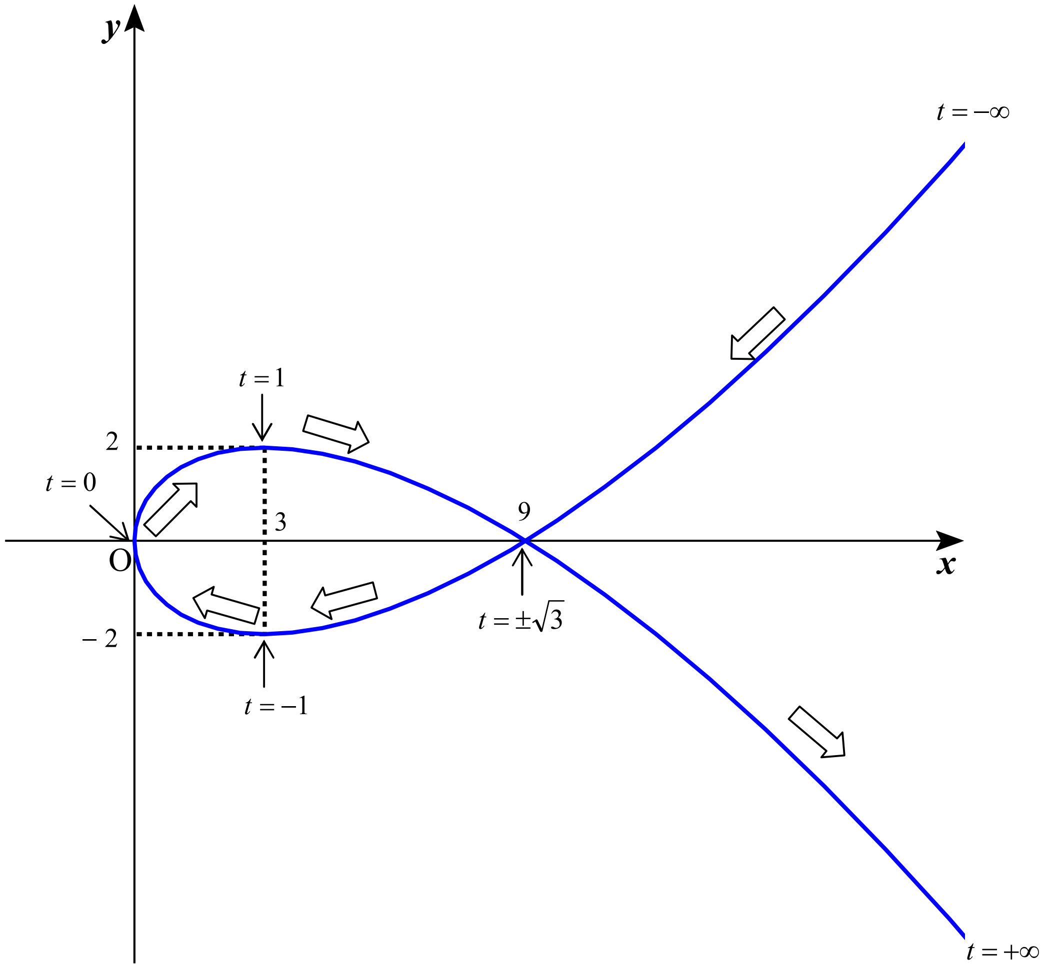
$$=\frac{2}{3}$$

54

$\dfrac{dx}{dt}=6t$， $\dfrac{dy}{dt}=3-3t^2=3(1+t)(1-t)$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
dx/dt	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
dy/dt	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x,\ y)$	$\leftarrow\downarrow$	$(3,\ -2)$	$\leftarrow\uparrow$	$(0,\ 0)$	$\rightarrow\uparrow$	$(3,\ 2)$	$\rightarrow\downarrow$

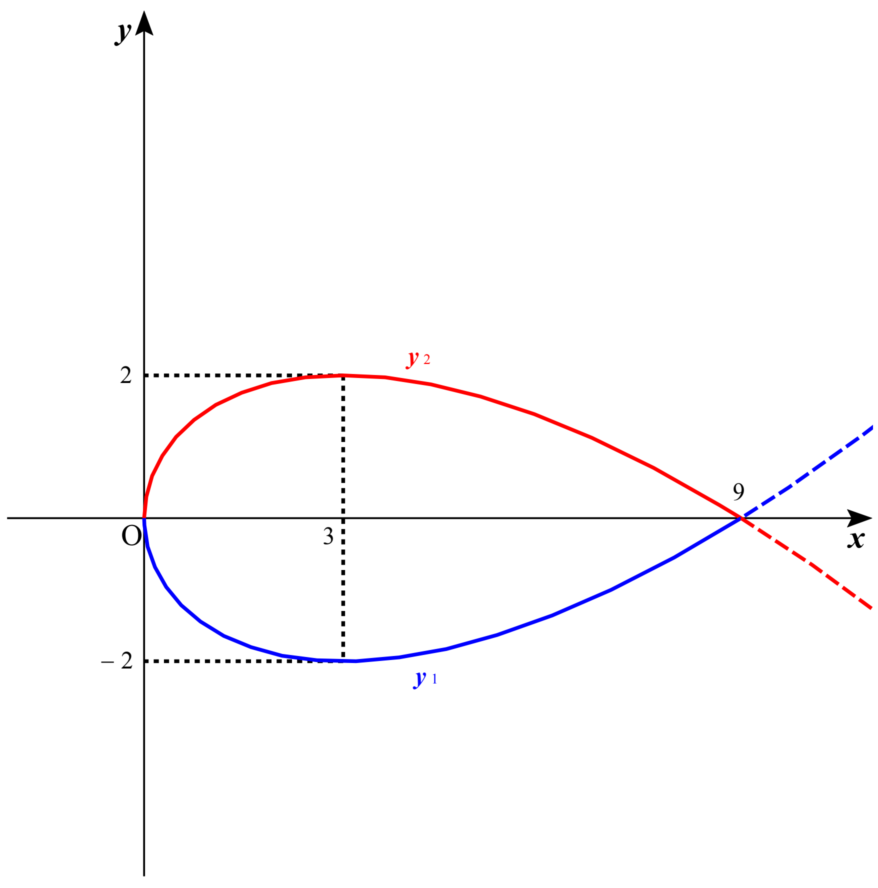
$y=0$ となるのは， $3t-t^3=t\left(3-t^2\right)=0$ より， $t=0,\ \pm\sqrt{3}$ のときで，
このとき， $(x,\ y)=(0,\ 0),\ (9,\ 0)$



$-\sqrt{3} \leq t \leq 0$ における y の部分を y_1，$0 \leq t \leq \sqrt{3}$ における y の部分を y_2 とする。

面積を S とすると，y_1 は x 軸すなわち $y=0$ より下にあることに注意して，

$$S = \int_0^9 (-y_1)dx + \int_0^9 y_2 dx$$
$$= \int_0^{-\sqrt{3}} \left\{-\left(3t-t^3\right)\right\}\frac{dx}{dt}dt + \int_0^{\sqrt{3}} \left(3t-t^3\right)\frac{dx}{dt}dt$$
$$= \int_{-\sqrt{3}}^0 \left(3t-t^3\right)\frac{dx}{dt}dt + \int_0^{\sqrt{3}} \left(3t-t^3\right)\frac{dx}{dt}dt$$
$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(3t-t^3\right)\frac{dx}{dt}dt$$
$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{\left(3t-t^3\right)\cdot 6t\right\}dt$$
$$= 6\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(3t^2-t^4\right)dt$$
$$= 6\cdot 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(3t^2-t^4\right)dt$$
$$= 12\left[t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{72\sqrt{3}}{5}$$



問題 A

190

(1)

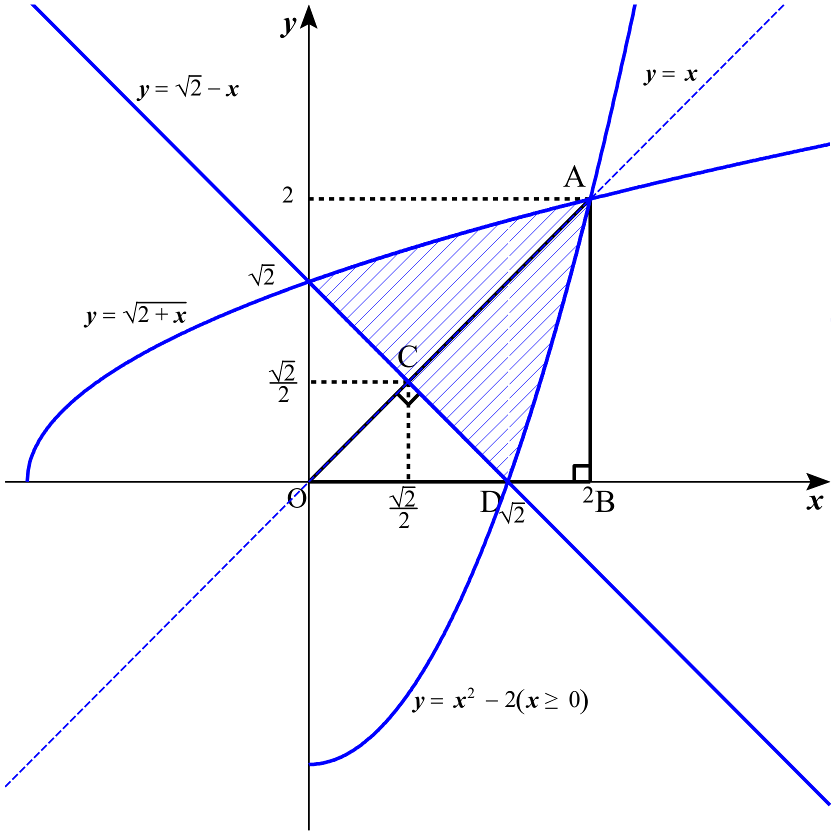
$y=g(x)$ とすると，$y=\sqrt{2+x}\ (x\geq -2,\ y\geq 0)$

両辺を 2 乗し，整理すると，$x=y^2-2\ (x\geq -2,\ y\geq 0)$

x を y に，y を x に書き換えることにより，$y=x^2-2\ (y\geq -2,\ x\geq 0)$

よって，$g^{-1}(x)=x^2-2$　定義域は $x\geq 0$

(2)



$y=g(x)=\sqrt{2+x}(x\geq -2)$ と $y=g^{-1}(x)=x^2-2(x\geq 0)$ は $y=x$ に関して対称だから，

斜線部の ACB の面積を 2 倍すればよい。

ACB の面積＝直角二等辺三角形 AOB−（直角二等辺三角形 COD＋領域 ADB）だから，

求める面積は

$$2\left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\left\{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(x^2-2\right)dx\right\}\right]=2\left\{2-\left(\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x\right]_{\sqrt{2}}^{2}\right)\right\}$$

$$=2\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{4}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{17-8\sqrt{2}}{3}$$

191

(1)

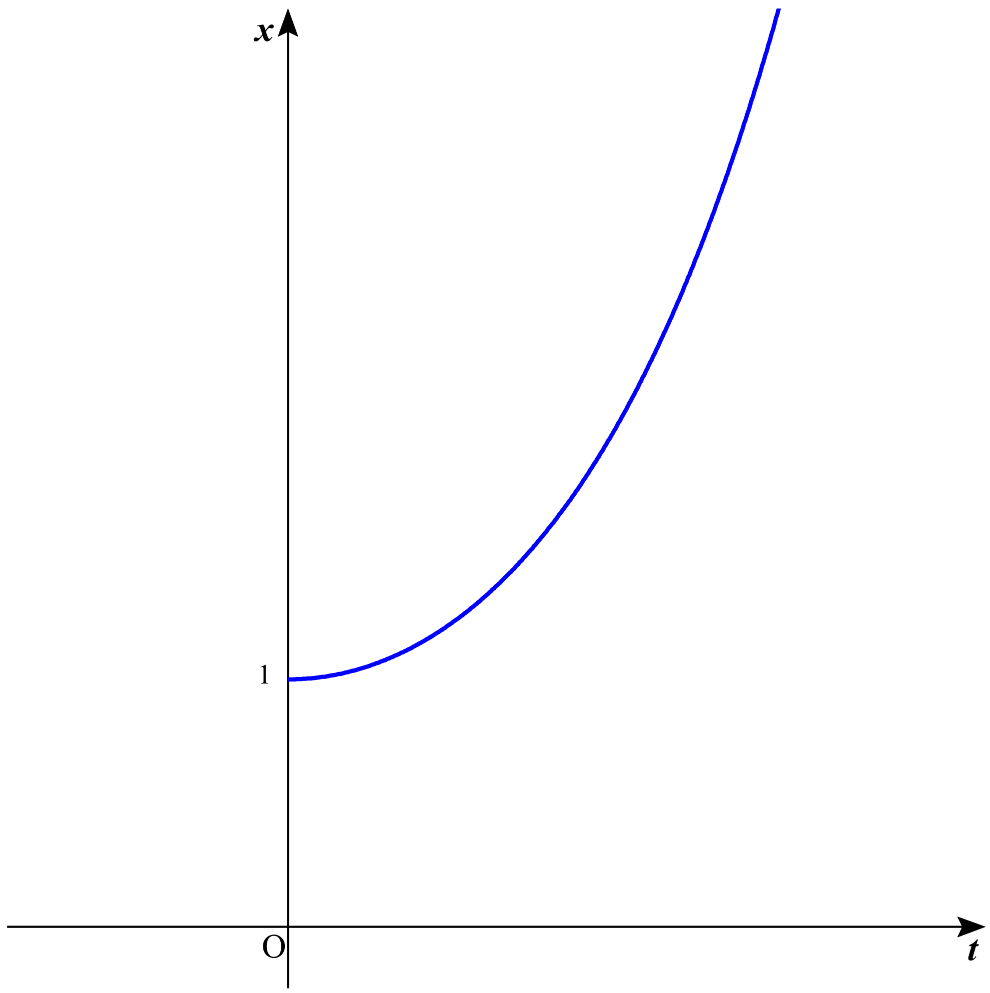
$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$
$$=\frac{e^{-t}\left(e^{2t}-1\right)}{2}$$
$$=\frac{e^{-t}\left(e^t+1\right)\left(e^t-1\right)}{2}$$

よって，$t=0$ で $\frac{dx}{dt}=0$，$t>0$ で $\frac{dx}{dt}>0$ より，$t\geq 0$ で単調増加する。

また，$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}>0$ より，グラフは下に凸

これと $t=0$ のとき 1

よって，グラフは次のようになる。



(2)

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}$$

$$=\sqrt{\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}}$$

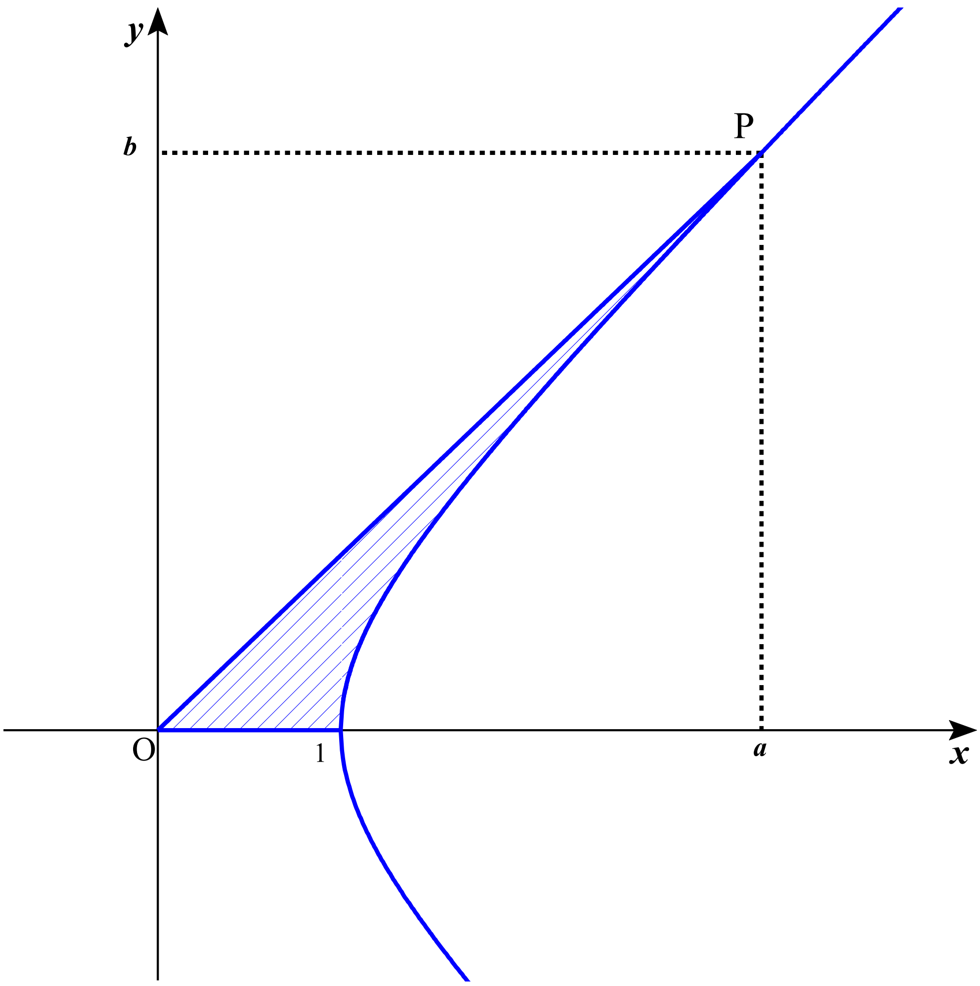
$$=\sqrt{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}$$

$$=\left|\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right|$$

ここで，(1)より，$t\geq 0$ で，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\geq 0$

よって，$\sqrt{x^2-1}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$

(3)



双曲線 $x^2-y^2=1$ $y\geq 0$ の部分は $y=\sqrt{x^2-1}$ だから，

求める面積を S とすると，図より， $S=\frac{1}{2}ab-\int_1^a \sqrt{x^2-1}dx$

ここで， $x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t\geq 0)$ とおくと，(2)より， $\sqrt{x^2-1}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$

したがって， $a=\frac{e^s+e^{-s}}{2}$ とすると， $b=\sqrt{a^2-1}=\frac{e^s-e^{-s}}{2}$

また， $x=a$ のとき $t=s$， $x=1$ のとき $t=0$

$$\begin{aligned}
\therefore S&=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^s+e^{-s}}{2}\cdot\frac{e^s-e^{-s}}{2}-\int_0^s\frac{e^t-e^{-t}}{2}\frac{dx}{dt}dt\\
&=\frac{e^{2s}-e^{-2s}}{8}-\int_0^s\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt\\
&=\frac{e^{2s}-e^{-2s}}{8}-\frac{1}{4}\int_0^s\left(e^{2t}-2+e^{-2t}\right)dt\\
&=\frac{e^{2s}-e^{-2s}}{8}-\frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}-2t\right]_0^s\\
&=\frac{s}{2}
\end{aligned}$$

192

(1)

曲線 C の増減と凹凸

$$f'(x)=2e^{1-\frac{1}{2}x}+2(x-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{1-\frac{1}{2}x}$$
$$=(3-x)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=\left\{(3-x)e^{1-\frac{1}{2}x}\right\}'$$
$$=-e^{1-\frac{1}{2}x}+(3-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x}$$
$$=\frac{1}{2}(x-5)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

より，$f'(x)=0,\ f''(x)=0$ の解はそれぞれ $x=3,\ x=5$

これと $\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ より，$f(x)$ の増減と凹凸は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$	∞
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\uparrow\cap$	極大	$\downarrow\cap$	変曲点	$\downarrow\cup$	0

曲線 C と接する直線 l の方程式

直線 l が曲線 C と接するときの接点の座標を $(t,\ f(t))$ とすると，

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

直線 l は原点を通るから，$-tf'(t)+f(t)=0$

これと，

$$-tf'(t)+f(t)=t(t-3)e^{1-\frac{1}{2}t}+2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t}$$
$$=\left(t^2-t-2\right)e^{1-\frac{1}{2}t}$$
$$=(t+1)(t-2)e^{1-\frac{1}{2}t}$$

より，$t=-1,\ 2$

よって，曲線 C と接する直線 l の傾きは $f'(-1)=4e^{\frac{3}{2}},\ f'(2)=1$

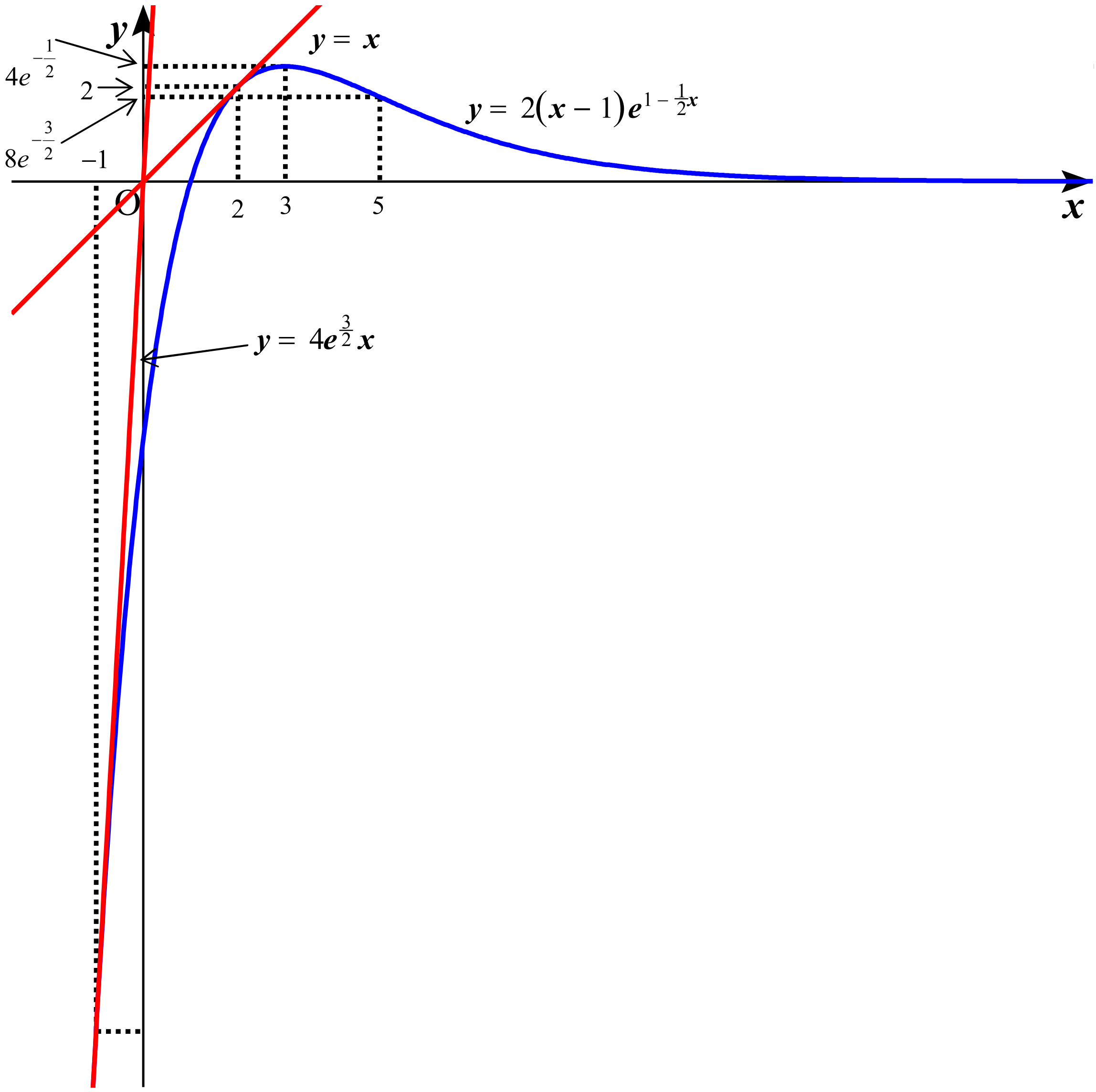
ゆえに，その方程式は

$y=4e^{\frac{3}{2}}x$ （接点$\left(-1,\ -4e^{\frac{3}{2}}\right)$） ・・・①

$y=x$ （接点$(2,\ 2)$） ・・・②

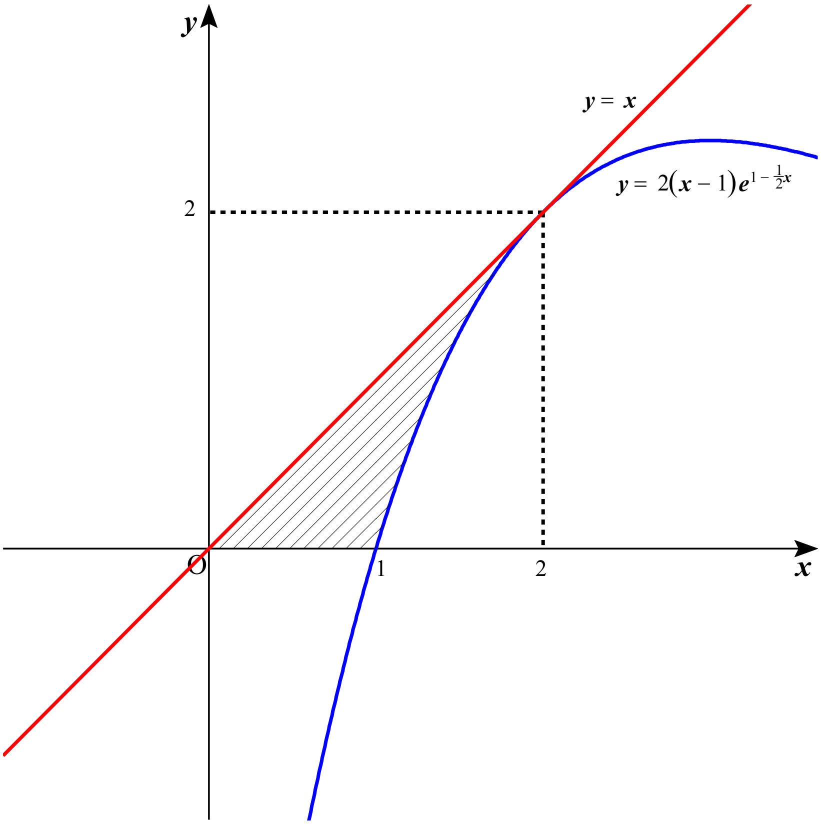
以上より，曲線 C と①，②のグラフをかくと，次ページ図のようになる。

よって，図より，$0<a<1,\ 4e^{\frac{3}{2}}<a$



(2)

求める面積を S とすると，下図より， $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-2\int_1^2 (x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}dx$



これと，

$$\int_1^2 (x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}dx=\int_1^2 (x-1)\left(-2e^{1-\frac{1}{2}x}\right)'dx$$
$$=\left[-2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}\right]_1^2-\int_1^2 -2(x-1)'e^{1-\frac{1}{2}x}dx$$
$$=-2+2\int_1^2 e^{1-\frac{1}{2}x}dx$$
$$=-2+2\left[-2e^{1-\frac{1}{2}x}\right]_1^2$$
$$=-6+4\sqrt{e}$$

より，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-2\int_1^2 (x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}dx$$
$$=2-2\left(-6+4\sqrt{e}\right)$$
$$=14-8\sqrt{e}$$

193

(1)

解法 1

$2x-\sqrt{3}y=0$ より，$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$　・・・①

$1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ より，$1+x^2=y^2$　$\therefore y^2-x^2=1$　・・・②

交点の座標は①と②を同時に満たすから，①を②に代入し整理すると $\dfrac{1}{3}x^2=1$

$\therefore x^2=\sqrt{3}$

ここで，$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$x=\tan t>0$

よって，$x=\sqrt{3}$

これを①に代入することにより，$y=2$

ゆえに，交点の座標は$\left(\sqrt{3},\ 2\right)$

解法 2

$x=\tan t,\ y=\dfrac{1}{\cos t}$ を $2x-\sqrt{3}y=0$ に代入すると，$2\tan t-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos t}=0$

ここで，$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\tan t=\dfrac{\sin t}{\cos t}$ としてよいから，$\dfrac{2\sin t}{\cos t}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos t}=0$　$\therefore \dfrac{2\sin t-\sqrt{3}}{\cos t}=0$

$\therefore \sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$t=\dfrac{\pi}{3}$

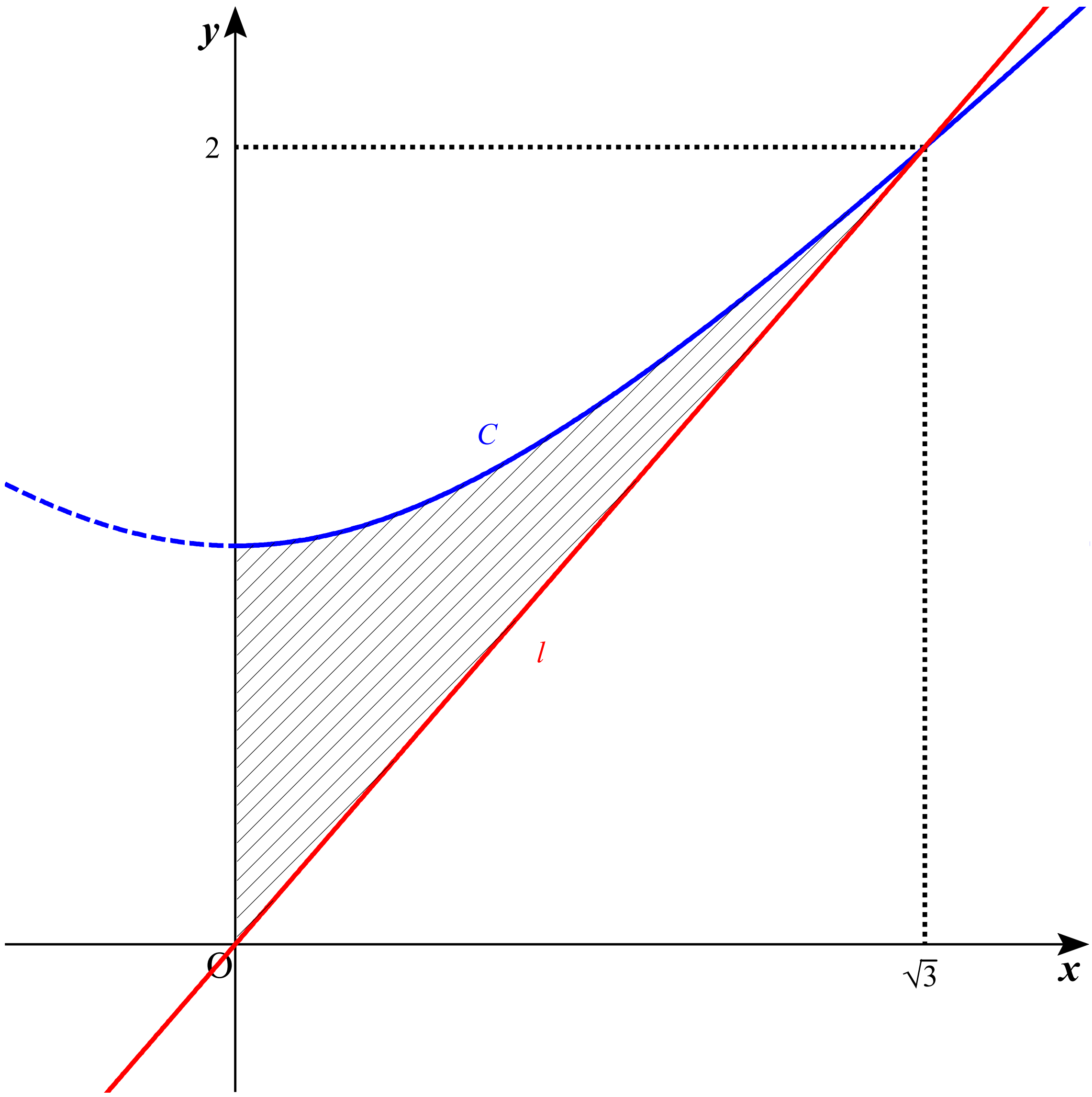
よって，$x=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3},\ y=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3}}=2$

ゆえに，交点の座標は$\left(\sqrt{3},\ 2\right)$

(2)

②および $0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}$ より，曲線 C は双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ の $x \geq 0,\ y > 0$ の部分を表す。

よって，下図の斜線部分の面積を求めればよい。



曲線 C を y_1，求める面積を S とすると，$S=\int_0^{\sqrt{3}} y_1 dx-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2$

ここで，$y_1=\frac{1}{\cos t}$，$x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$，$x=0\Rightarrow t=0$ より，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt-\sqrt{3}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt-\sqrt{3}$$

さらに，

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot(\tan t)' dt$$
$$=\left[\frac{\tan t}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan t\left(\frac{1}{\cos t}\right)' dt$$
$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$
$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$$
$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt$$
$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}dt$$

より，$2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 t}dt=2\sqrt{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}dt$

よって，$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 t}dt=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}dt$

$$\therefore S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt-\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}dt-\sqrt{3}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{(1+\sin t)(1-\sin t)}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos t}{1+\sin t}+\frac{\cos t}{1-\sin t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[\log(1+\sin t)-\log(1-\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{4}\left[\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{4}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

よって，求める面積は$\frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right)$

補足

$\int_0^{\sqrt{3}} \boldsymbol{y_1 dx}$ の積分の別解： $\cos t dt$ をつくって置換積分

$$\int_0^{\sqrt{3}} y_1 dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^4 t}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\left(\cos^2 t\right)^2}\cdot\cos t dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin^2 t}\right)^2\cos t dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{1}{(1+\sin t)(1-\sin t)}\right\}^2\cos t dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)\right\}^2\cos t dt$$

ここで， $\sin t=u$ とおくと， $\cos t dt=du$ ， $t=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $t=0\Rightarrow u=0$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{3}} y_1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin t} + \frac{1}{1-\sin t} \right) \right\}^2 \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) \right\}^2 du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ (1+u)^{-2} + (1-u)^{-2} + \frac{2}{(1+u)(1-u)} \right\} du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ (1+u)^{-2} + (1-u)^{-2} + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right\} du$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} + \log(1+u) - \log(1-u) \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2u}{1-u^2} + \log\frac{1+u}{1-u} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\sqrt{3} + \log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{4}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

問題 B

194

解法 1

直線l_tをtについて整理する。tは$0<t<1$を満たす実数である。

解

直線l_tをtについて整理すると，$t^2+(x-y-1)t+y=0$だから，
題意の直線l_tが通過する部分を求めることと
tについての 2 次方程式$t^2+(x-y-1)t+y=0$ $(x>0,\ y>0)$が$0<t<1$を満たす実数解tを少なくとも 1 つもつための条件を求めることは同値である。
すなわち$Y=f(t)=t^2+(x-y-1)t+y$ $(x>0,\ y>0)$とおくと，
放物線$Y=f(t)$とt軸との共有点が，$0<t<1$において，少なくとも 1 つ存在するための条件を求めることと同値である。
放物線$Y=f(t)$とt軸との共有点が，$0<t<1$において，少なくとも 1 つ存在するとき
$f(0)=y>0,\ f(1)=x>0$より，
$Y=f(t)$の頂点のt座標の値は$0<t<1$，Y座標の値は 0 以下を満たす。
したがって，

$$Y=f(t)$$
$$=t^2+(x-y-1)t+y$$
$$=\left(t+\frac{x-y-1}{2}\right)^2-\frac{(x-y-1)^2-4y}{4}$$

より，

$$0<-\frac{x-y-1}{2}<1 \quad \text{かつ} \quad -\frac{(x-y-1)^2-4y}{4}\leq 0$$

$0<-\dfrac{x-y-1}{2}<1$を整理すると，$-2<x-y-1<0$　すなわち　$x-1<y<x+1$・・・①

$-\dfrac{(x-y-1)^2-4y}{4}\leq 0$を整理すると，$\{(x-y-1)+2\sqrt{y}\}\{(x-y-1)-2\sqrt{y}\}\geq 0$

ここで，①より，$-2<x-y-1<0$だから，$(x-y-1)-2\sqrt{y}<0$

よって，$(x-y-1)+2\sqrt{y}<0$　すなわち$x\leq\left(\sqrt{y}-1\right)^2$　・・・②

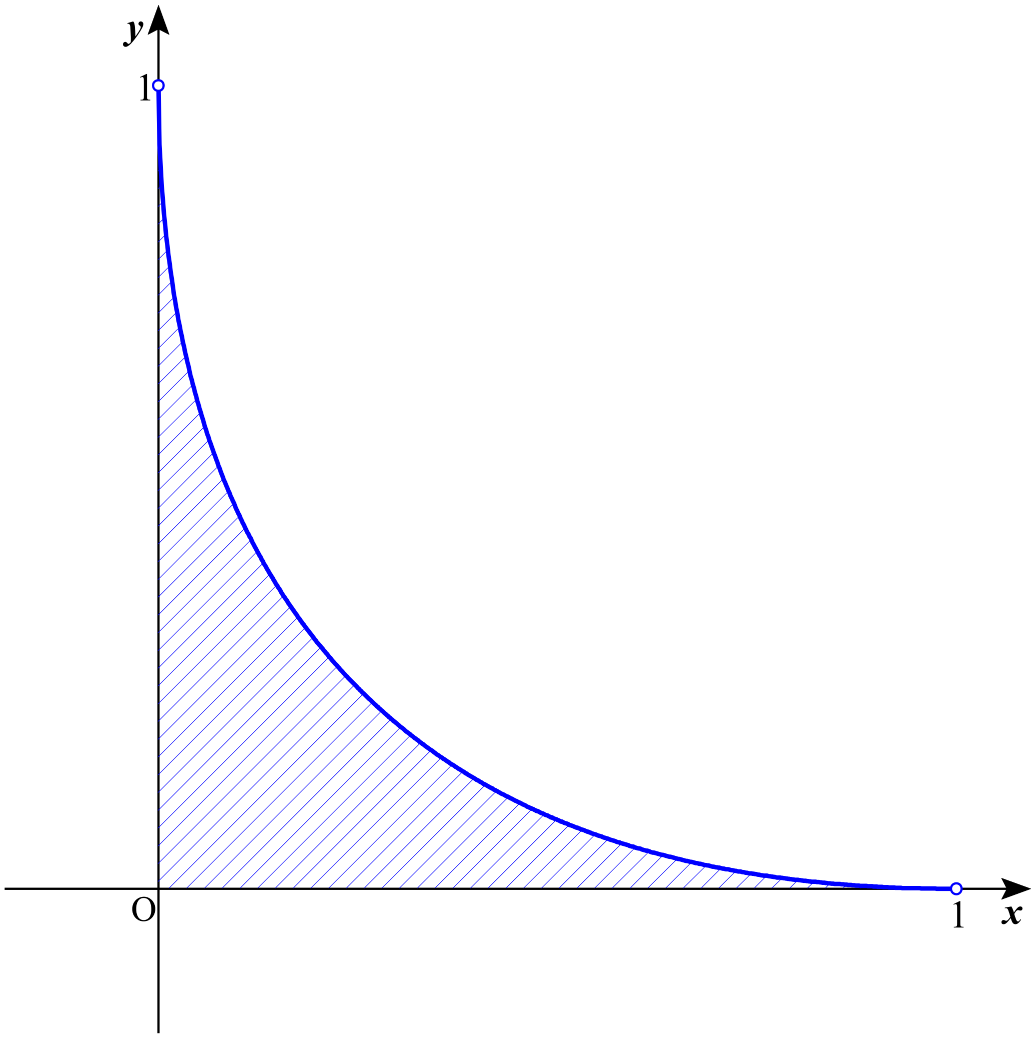
ゆえに，$x>0,\ y>0$において，①かつ②を満たす領域が題意の直線l_tが通過する部分である。

そこで，これを図示するにあたって，$x=\left(\sqrt{y}-1\right)^2$の増減を調べる。

両辺を y で微分すると，$x'=\dfrac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}}$ より，x の増減は次のようになる。

y	0	$\cdots$	1	$\cdots$
x'	/	$-$	0	$+$
x	1	↓	0	↑

よって，求める部分は



ただし，$x=\left(\sqrt{y}-1\right)^2\ (0<y<1)$ は含むが座標軸は含まない。

また，その面積（近似値）は

$$\int_0^1 x dy = \int_0^1 \left(\sqrt{y}-1\right)^2 dy$$
$$= \int_0^1 \left(y - 2\sqrt{y} + 1\right) dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + y\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6}$$

解法 2

ポイント

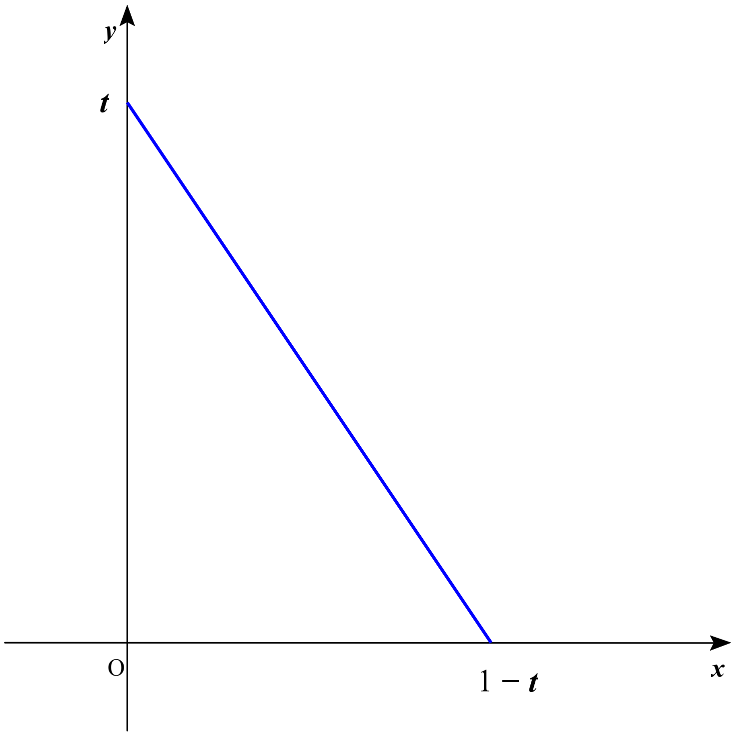
y を，x をある定数とする，t の関数とみなし，そのときの y の最大値を x で表すと，
その y はある x における l_t の最大値となる。

解

直線 l_t を切片方程式で表すと $\dfrac{x}{1-t} + \dfrac{y}{t} = 1$ だから，

その x 切片，y 切片はそれぞれ $1-t$，t である。

よって，$x>0,\ y>0$ における直線 l_t の部分は点 $(1-t,\ 0)$ と点 $(0,\ t)$ を結ぶ線分である。



したがって，$x>0,\ y>0$ における直線 l_t の定義域は $0<x<1-t<1\ (\because 0<t<1)$ ・・・①

直線 l_t は $y = \dfrac{t}{t-1}x + t$ とも表わせることと

$$\frac{t}{t-1}x+t=\frac{(t-1)+1}{t-1}x+t$$
$$=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)x+t$$
$$=t+\frac{1}{t-1}x+x$$

より，$y=f(t)=t+\dfrac{1}{t-1}x+x$ とおくと，その定義域は，①より，$0<t<1-x$ ・・・②

また，

$$f'(t)=1+\frac{-x}{(t-1)^2}$$
$$=\frac{(t-1)^2-x}{(t-1)^2}$$
$$=\frac{\{(t-1)+\sqrt{x}\}\{(t-1)-\sqrt{x}\}}{(t-1)^2}$$
$$=\frac{(t-1+\sqrt{x})(t-1-\sqrt{x})}{(t-1)^2}$$

より，$f'(t)=0$ の解は $t=1-\sqrt{x},\ 1+\sqrt{x}$

これと①，②より，$0<1-\sqrt{x}<1-x<1+\sqrt{x}$

したがって，$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$1-\sqrt{x}$	$\cdots$	$1-x$
$f'(t)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(t)$	/	↑	極大	↓	/

よって，$0<x<1$ を満たすある x における y の最大値は

$$f(1-\sqrt{x})=(1-\sqrt{x})+\frac{1}{(1-\sqrt{x})-1}x+x$$
$$=1-2\sqrt{x}+x$$
$$=(\sqrt{x}-1)^2$$

ゆえに，x を定数とみなしたときの最大値は $y=(\sqrt{x}-1)^2\ (0<x<1)$

したがって，条件を満たす直線 l_t の通過部分は，

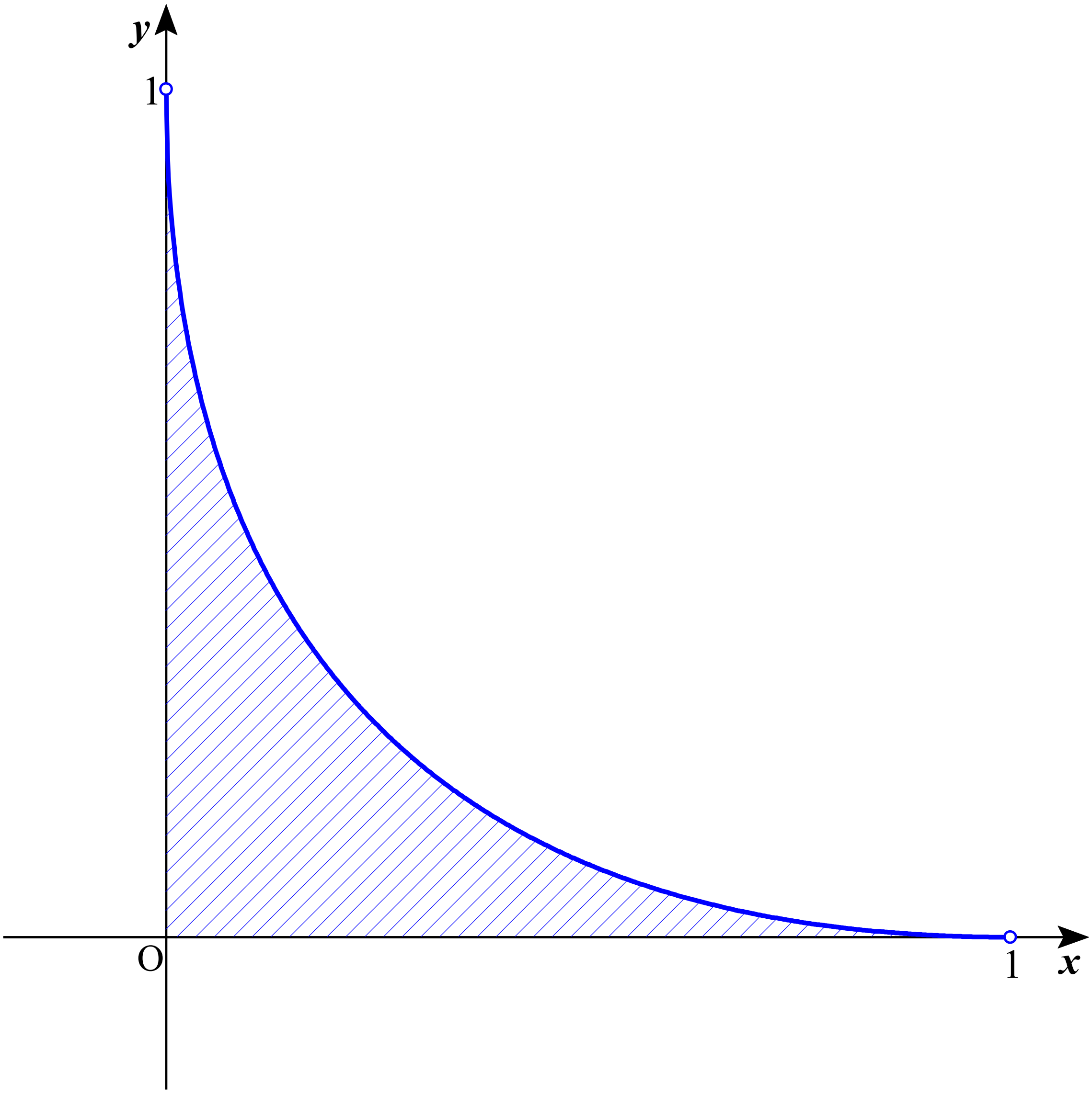
$y=(\sqrt{x}-1)^2\ (0<x<1)$，$x>0$，$y>0$ に囲まれた部分である。

これを図示すると，次ページのグラフのようになる。

ただし，$y=(\sqrt{x}-1)^2\ (0<x<1)$ は含むが座標軸は含まない。

また，その面積（近似値）は

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x}-1\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6}$$



解法 3

ポイント

直線l_tと接し且つその直線との接点以外の点をもたない曲線（「包絡線」という）を仮定し，その方程式を求める。

解

直線l_tはtをパラメータとする直線群を表している。

直線l_tが$0<t<1$の範囲を動くとき，その各々の直線と接し且つそれらの直線との接点以外の点をもたない曲線Cを仮定する。

曲線C上の点はl_tとの接点だから，tを媒介変数として，$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ と表すことにする。

$(x(t),\ y(t))$は直線l_t上の点だから，$tx(t)+(1-t)y(t)=t(1-t)$を満たす。

$\therefore\ tx(t)+(1-t)y(t)+t^2-t=0$　・・・①

$(x(t),\ y(t))$における接線の傾きは$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$　・・・②

一方，l_tをxで微分すると，$t+(1-t)\dfrac{dy}{dx}=0$

これと$0<t<1$より，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{t}{1-t}$　・・・③

仮定より，$0<t<1$の任意のtに対し②＝③が成り立つから，$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=-\dfrac{t}{1-t}$

よって，$(1-t)y'(t)=-tx'(t)$　すなわち　$tx'(t)+(1-t)y'(t)=0$　・・・④

ここで，①をtで微分すると，$\dfrac{d}{dt}\{tx(t)+(1-t)y(t)+t^2-t\}=0$であり，

左辺は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{tx(t)+(1-t)y(t)+t^2-t\}&=x(t)+t\frac{dx(t)}{dt}-y(t)+(1-t)\frac{dy(t)}{dt}+2t-1\\&=x(t)-y(t)+2t-1+tx'(t)+(1-t)y'(t)\end{aligned}$$

となるから，

$x(t)-y(t)+2t-1+tx'(t)+(1-t)y'(t)=0$

これと④より，$x(t)-y(t)+2t-1=0$　$\therefore\ x(t)-y(t)=-2t+1$　・・・⑤

よって，①と⑤の連立方程式を解くことにより，曲線Cの方程式は$\begin{cases} x=(t-1)^2 \\ y=t^2 \end{cases}$

したがって，$\dfrac{d}{dt}x=2(t-1),\ \dfrac{d}{dt}y=2t$ より，曲線 C 上の点は次のように変化する。

t	0	$\cdots$	1
dx/dt	/	$-$	/
dy/dt	/	$+$	/
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$(\leftarrow,\ \uparrow)$	$(0,\ 1)$

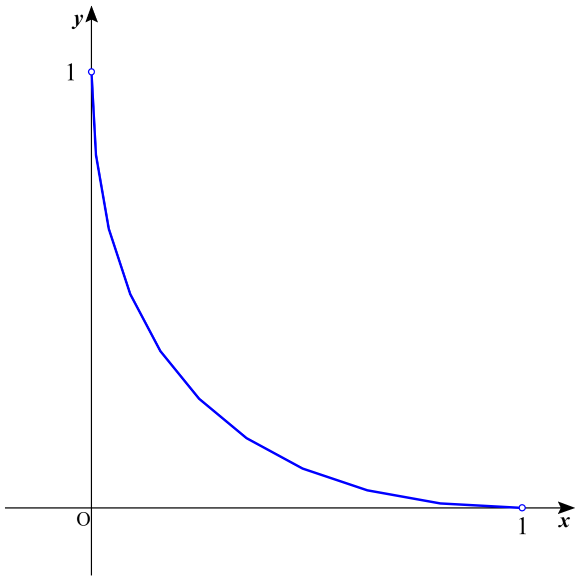
ただし，$(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ は含まない。

さらに，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t}{t-1}$ および $0<t<1$ より，

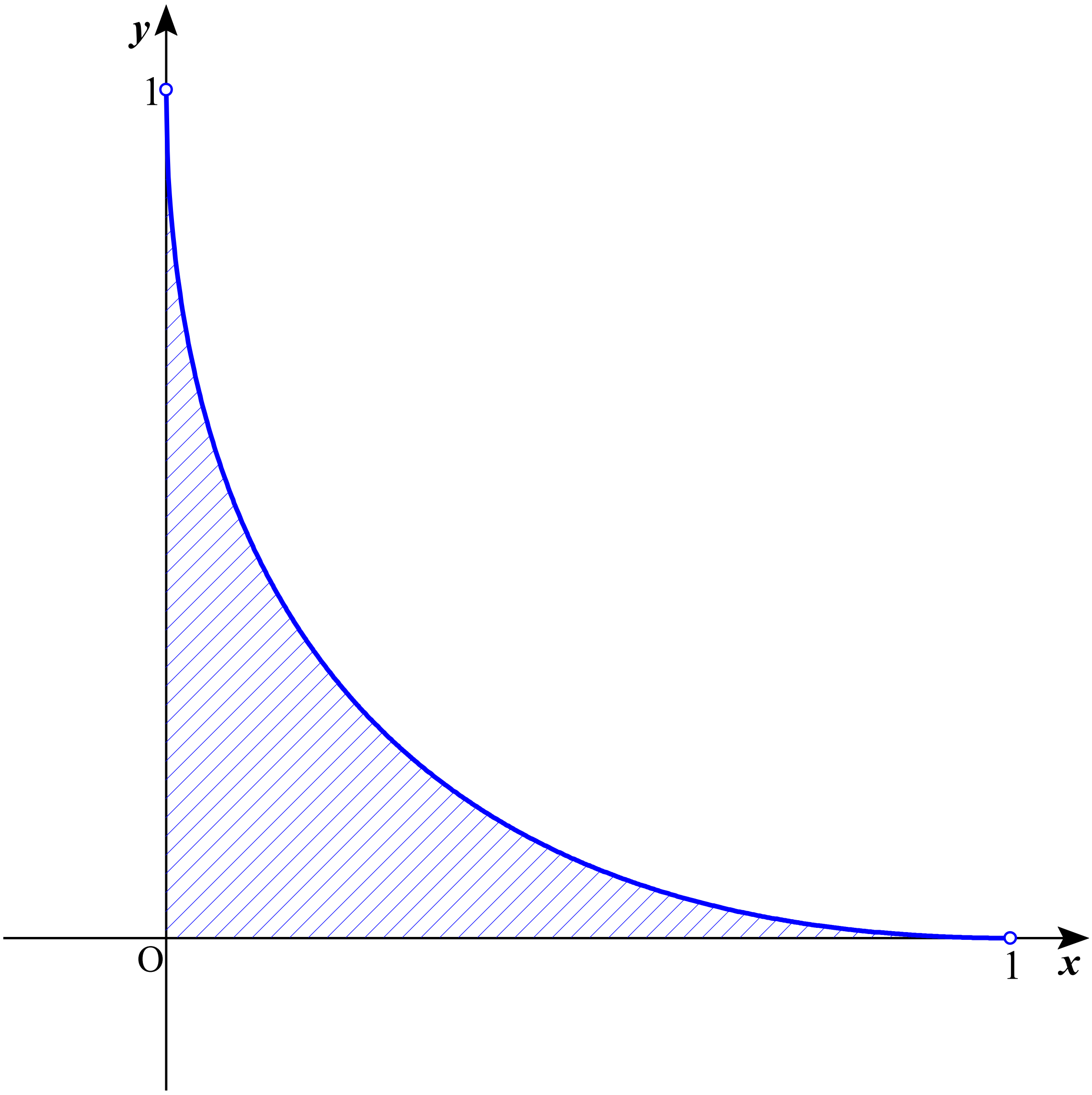
$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{t-1}\right)\\&=\frac{d\left(\frac{t}{t-1}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\&=\frac{d\left(\frac{t}{t-1}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\\&=-\frac{1}{(2t-1)(t-1)^2}<0\end{aligned}$$

よって，曲線 C は下に凸である。

以上より，その概形は下図のようになる。



したがって，曲線 C の接線群，すなわち直線 l_t の $0<t<1$ における通過領域は
曲線 C と $x>0$, $y>0$ で囲まれた部分である。よって，下図のようになる。
ただし，座標軸は含まない。



よって，求める面積（近似値）は

$$\int_0^1 y\,dx=\int_1^0 t^2\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$
$$=\int_1^0 t^2\cdot 2(t-1)\cdot dt$$
$$=2\int_0^1 \left(t^2-t^3\right)dt$$
$$=2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}$$

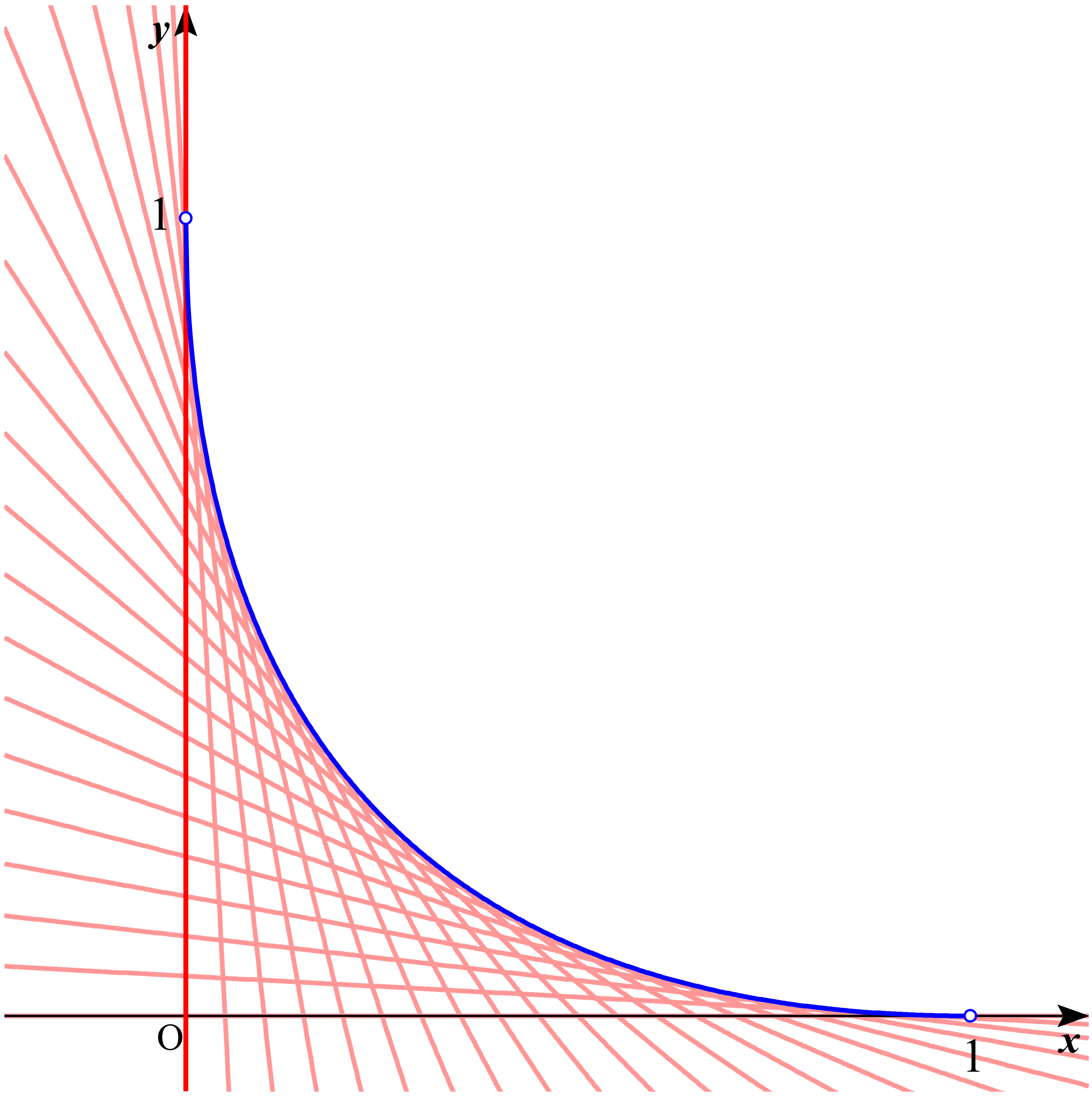
補足 1

$x(t)-y(t)=-2t+1$ より，$t=\dfrac{-x(t)+y(t)+1}{2}$

これを①に代入し，整理することにより，曲線 C は $x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0$ とも表せる。

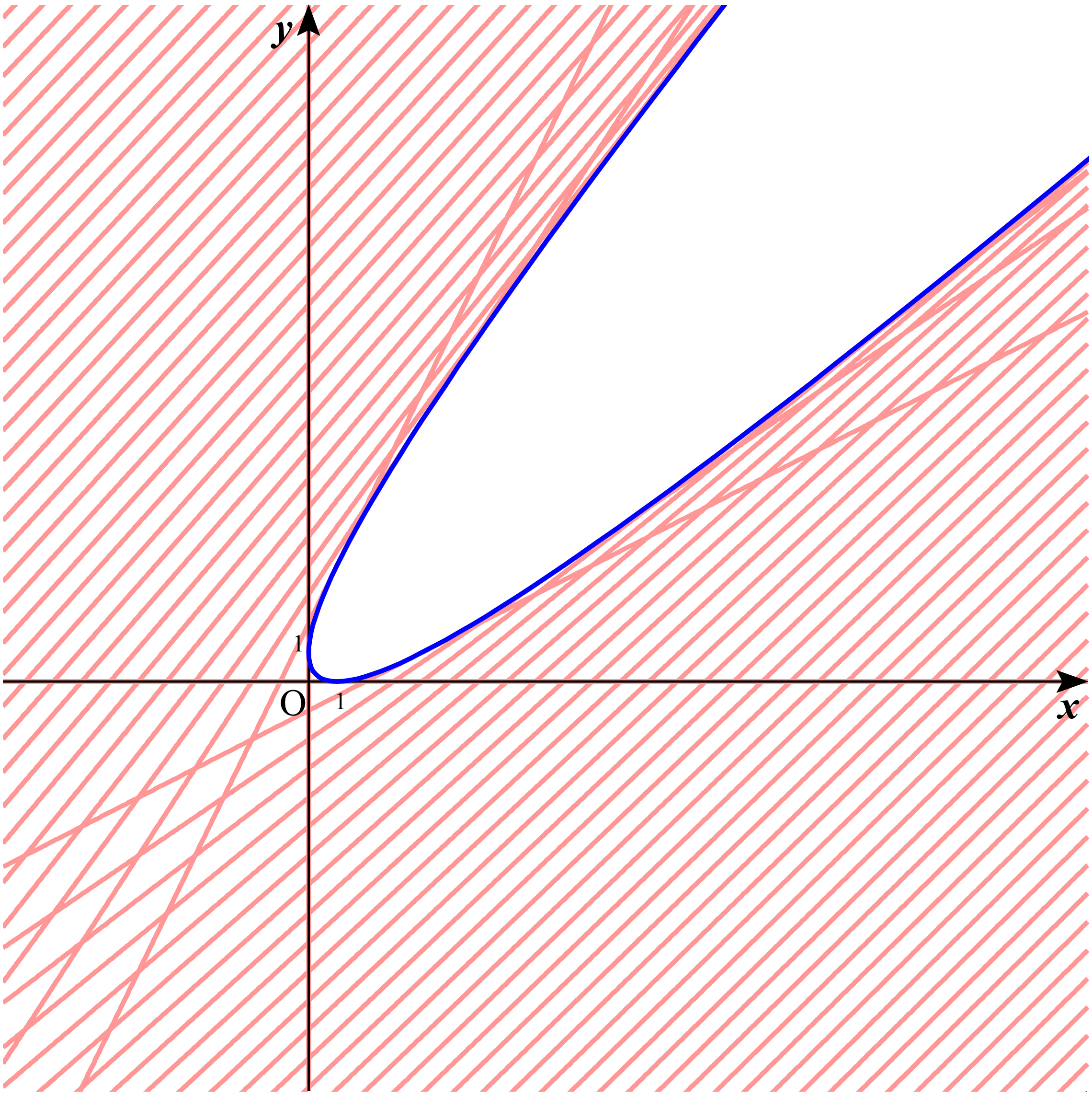
補足 2

曲線 C と $tx+(1-t)y=t(1-t)$ $(0<1<t)$



直線群 l_t の包絡線 $\begin{cases} x=(t-1)^2 \\ y=t^2 \end{cases}$ （$t=1$ においては $\dfrac{dx}{dy}$ で傾きを定義した）と直線群 l_t

青色実線が包絡線，赤色実線が直線群



195

(1)

$(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ および $r=\sqrt{\cos 2\theta}$ より，$(x,\ y)=\left(\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}\right)$

(2)

点 Q の直交座標を $(x,\ y)=\left(\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}\right)$ とすると，

x と y は開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ において θ で微分可能だから，$\cos 2\theta \neq 0$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=-\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}+\cos\theta\cdot -2\sin 2\theta\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\\&=-\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}-\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\\&=-\frac{\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\\&=-\frac{\sin(\theta+2\theta)}{\sqrt{\cos 3\theta}}\\&=-\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}+\sin\theta\cdot -2\sin 2\theta\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\\&=\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}-\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\\&=\frac{\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\\&=\frac{\cos(\theta+2\theta)}{\sqrt{\cos 3\theta}}\\&=\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\end{aligned}$$

また，開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ において θ で微分可能だから，$\sin 3\theta \neq 0$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\dfrac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$

点 Q において $\dfrac{dy}{dx}=-1$ より，$-\dfrac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}=-1 \quad \therefore \tan 3\theta=1$

これと $0<3\theta<\dfrac{3}{4}\pi$ より，$3\theta=\dfrac{\pi}{4}$　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{12}$

(3)

曲線 C すなわち $\begin{cases} x=\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} \\ y=\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} \end{cases}$ $\left(0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}\right)$ は開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ において微分可能だから，

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}<0$

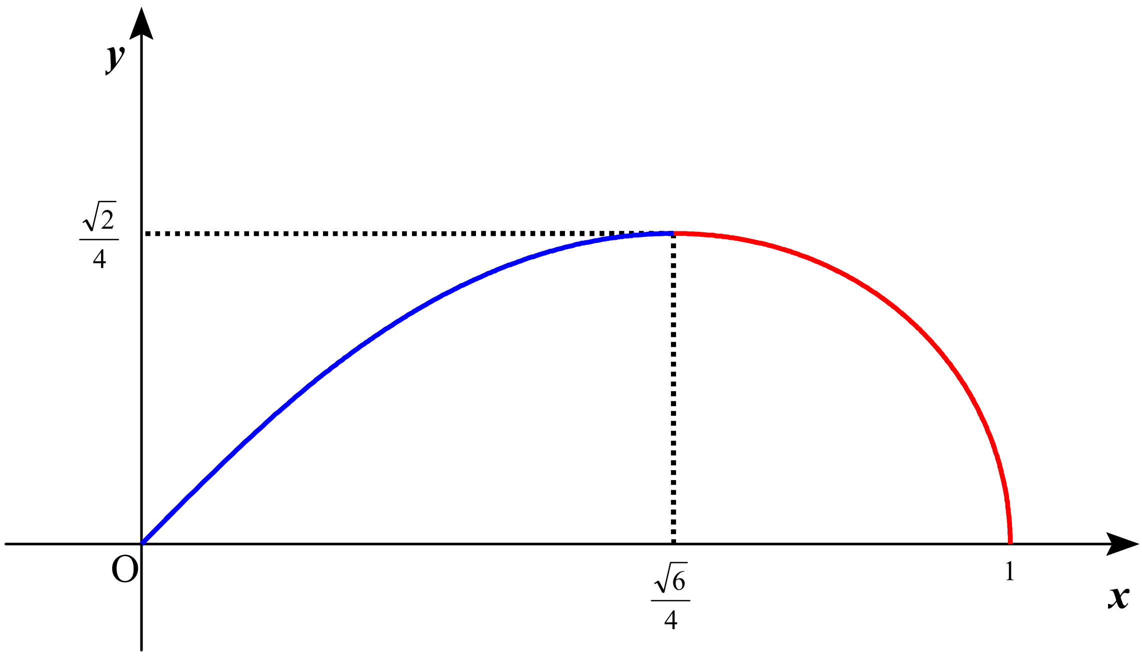
$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ より，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ の解は，$3\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

よって，θ と曲線 C 上の点の変化の関係は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$dx/d\theta$	/	$-$	$-$	$-$	/
$dy/d\theta$	/	$+$	0	$-$	/
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$(\leftarrow,\ \uparrow)$	$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$	$(\leftarrow,\ \downarrow)$	$(0,\ 0)$

ゆえに，その概形は下図のようになり，

赤色実線と $x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ および x 軸に囲まれた部分の面積を求めればよい。



よって，

$$S=\int_{\frac{\sqrt{6}}{4}}^{1} y\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\left(-\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin\theta\sin 3\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\{\cos(3\theta-\theta)-\cos(3\theta+\theta)\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2\theta-\cos 4\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

または，極方程式を使って求めると，下図より，

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2 d\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2\theta\,d\theta-\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sin 2\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}-\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{16}$$